2011年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题:1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选

合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 已知当 $x \to 0$ 时,函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小,则( ).

(A) $k=1, c=4$ (B) $k=1, c=-4$

(C) $k=3, c=4$ (D) $k=3, c=-4$

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$ ( ).

(A) $-2f'(0)$ (B) $-f'(0)$ (C) $f'(0)$ (D) 0

(3) 设 $\{u_n\}$ 是数列,则下列命题正确的是( ).

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx$, $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$,则 I,J,K 的大小关系为(

(A) $I<J<K$ (B) $I<K<J$ (C) $J<I<K$ (D) $K<J<I$

(5) 设 A 为3阶矩阵,将 A 的第2列加到第1列得矩阵 B,再交换 B 的第2行与第3行

矩阵.记 $P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$,则 $A=$ ( ).

(A) P_1P_2 (B) $P_1^{-1}P_2$ (C) P_2P_1 (D) $P_2P_1^{-1}$

(6) 设 A 为 4×3 矩阵,η_1,η_2,η_3 是非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的3个线性无关解,k_1,k

意常数,则 $Ax=\beta$ 的通解为( ).

(A) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$ (B) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$

(C) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_3-\eta_1)+k_2(\eta_2-\eta_1)$ (D) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta$

(7) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数,其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数

为概率密度的是( ).

(A) $f_1(x)f_2(x)$　　(B) $2f_2(x)F_1(x)$

(C) $f_1(x)F_2(x)$　　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

(8) 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自该总体的简单随机样本，则对于统计量 $T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 和 $T_2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n$，有(　　).

(A) $ET_1>ET_2,DT_1>DT_2$　　(B) $ET_1>ET_2,DT_1<DT_2$

(C) $ET_1<ET_2,DT_1>DT_2$　　(D) $ET_1<ET_2,DT_1<DT_2$

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$ ________.

(10) 设函数 $z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}$ ________.

(11) 曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

(12) 曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为________.

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 1，$\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3，则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)=$ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

(16)（本题满分 10 分）

已知函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，$z=f(x+y,f(x,y))$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}$.

(17)（本题满分 10 分）

求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

(18)（本题满分 10 分）

证明方程 $4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有两个实根.

(19)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有连续导数，$f(0)=1$，且满足

$$\iint\limits_{D_t}f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_t}f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D_t=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant t-x,0\leqslant x\leqslant t\}(0<t\leqslant 1)$.

求 $f(x)$ 的表达式.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,$

$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^T$ 线性表示.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

,

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

.

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$.

(Ⅰ)求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ)求 $Z=XY$ 的概率分布;

(Ⅲ)求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布,其中 G 是由 $x-y=0,x+y=$

$y=0$ 所围成的三角形区域.

(Ⅰ)求 X 的概率密度 $f_X(x)$;

(Ⅱ)求条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$.