2010年全国硕士研究生入学统一考试
数学三试题

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^{x}\right]=1$，则 a 等于（　）.

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

(2) 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则（　）.

(A) $\lambda=\frac{1}{2}, \mu=\frac{1}{2}$　　(B) $\lambda=-\frac{1}{2}, \mu=-\frac{1}{2}$

(C) $\lambda=\frac{2}{3}, \mu=\frac{1}{3}$　　(D) $\lambda=\frac{2}{3}, \mu=\frac{2}{3}$

(3) 设函数 $f(x), g(x)$ 具有二阶导数，且 $g''(x)<0$. 若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，则 $f(g(x))$ 在 x_0 取极大值的一个充分条件是（　）.

(A) $f'(a)<0$　　(B) $f'(a)>0$　　(C) $f''(a)<0$　　(D) $f''(a)>0$

(4) 设 $f(x)=\ln^{10}x, g(x)=x, h(x)=e^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有（　）.

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$　　(B) $h(x)<g(x)<f(x)$

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$　　(D) $g(x)<f(x)<h(x)$

(5) 设向量组 Ⅰ：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 Ⅱ：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示. 下列命题正确的是（　）.

(A) 若向量组 Ⅰ 线性无关，则 $r\leqslant s$　　(B) 若向量组 Ⅰ 线性相关，则 $r>s$

(C) 若向量组 Ⅱ 线性无关，则 $r\leqslant s$　　(D) 若向量组 Ⅱ 线性相关，则 $r>s$

(6) 设 A 为4阶实对称矩阵，且 $A^2+A=O$. 若 A 的秩为3，则 A 相似于（　）.

(A) $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1/2, & 0\leqslant x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $P\{X=1\}=$（　）.

(A)0 (B)$\frac{1}{2}$ (C)$\frac{1}{2}-e^{-1}$ (D)$1-e^{-1}$

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为$[-1,3]$上均匀分布的概率密度，若

$$f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\leqslant 0,\\ bf_2(x), & x>0\end{cases}\quad(a>0,b>0)$$

为概率密度，则 a,b 应满足（　　）.

(A)$2a+3b=4$ (B)$3a+2b=4$

(C)$a+b=1$ (D)$a+b=2$

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y}e^{-t^2}dt=\int_0^x x\sin t^2dt$ 确定，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ________.

(10) 设位于曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2x)}}\ (e\leqslant x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为 ________.

(11) 设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^3$，其中 p 为价格，且 $R(1)=1$，则 $R(p)=$ ________.

(12) 若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点$(-1,0)$，则 $b=$ ________.

(13) 设 A,B 为3阶矩阵，且 $|A|=3$，$|B|=2$，$|A^{-1}+B|=2$，则 $|A+B^{-1}|=$ ________.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本. 记统计量 $T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，则 $ET=$ ________.

三、解答题：15～23小题，共94分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分10分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

(16)（本题满分10分）

计算二重积分 $\iint\limits_D(x+y)^3dxdy$，其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成.

(17)（本题满分10分）

求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

(18)（本题满分10分）

(Ⅰ) 比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^ndt$ 与 $\int_0^1t^n|\ln t|dt\ (n=1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由；

(Ⅱ) 记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^ndt\ (n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

(19)（本题满分10分）

设函数 $f(x)$ 在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内存在二阶导数，且

$$2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3).$$

（Ⅰ）证明存在$\eta\in(0,2)$，使$f(\eta)=f(0)$；

（Ⅱ）证明存在$\xi\in(0,3)$，使$f''(\xi)=0$.

20)（本题满分11分）

设$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}a\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$.已知线性方程组$Ax=b$存在2个不同的解.

（Ⅰ）求λ,a；

（Ⅱ）求方程组$Ax=b$的通解.

21)（本题满分11分）

设$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{bmatrix}$，正交矩阵$Q$使得$Q^TAQ$为对角矩阵.若$Q$的第1列为$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求$a,Q$.

2)（本题满分11分）

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},\ -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

求常数A及条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$.

3)（本题满分11分）

箱中装有6个球，其中红、白、黑球的个数分别为1，2，3个.现从箱中随机地取出2个球，记X为取出的红球个数，Y为取出的白球个数.

（Ⅰ）求随机变量(X,Y)的概率分布；

（Ⅱ）求$\mathrm{Cov}(X,Y)$.