题关键词：克莱罗微分方程的通解，奇解和包络，

形如：$y=xp+f(p)$,（其中$P=\dfrac{dy}{dx}$，$f(p)$是p连续可微函数）的方程，称为克莱罗（Clairaut）微分方程。

方程两边对 x 求导，$\dfrac{dy}{dx}=p+x\dfrac{dp}{dx}+f'(p)\dfrac{dp}{dx}\Rightarrow p=p+x\dfrac{dp}{dx}+f'(p)\dfrac{dp}{dx}\Rightarrow[x+f'(p)]\dfrac{dp}{dx}=0$，如果$\dfrac{dp}{dx}=0$，则 $p=c$（c为任意常数），代入原方程得：$y=cx+f(c)$，即为克莱罗微分方程通解。

例 1 题：求 $y=x\dfrac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ 通解，并求奇解？

解：令$\dfrac{dy}{dx}=p$，代入方程后为：$y=xp+\sqrt{1+p^2}$,是克莱罗微分方程，根据方程通解公式得，$y=cx+\sqrt{1+c^2}$ 是通解；方程两边对 x 求导得：$\dfrac{dy}{dx}=p+x\dfrac{dp}{dx}+\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\dfrac{dp}{dx}\Rightarrow(x+\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}})\dfrac{dp}{dx}=0$，如果$x+\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}=0$，联立原方程$\begin{cases}x+\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}=0\\ y=xp+\sqrt{1+p^2}\end{cases}$，由第一方程解出 $p=\pm\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，分别代入第二方程，$p=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$代入第二方程解出的 y，求导得的 P 与前面的 P 不等，舍去，验证后得 $p=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，$y=\sqrt{1-x^2}$ 是方程奇解。

例 2 题：解微分方程$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+(x+1)\dfrac{dy}{dx}-y=0$，并求其奇解？

解：令$\dfrac{dy}{dx}=p$，代入方程后为：$p^2+xp+p-y=0\Rightarrow y=xp+p^2+p$,是克莱罗微分方程，根据方程通解公式得，$y=cx+c^2+c$ 是通解；令$F(x,y,p)=p^2+p+xp-y=0$，则 $F_p^{'}(x,y,p)=2p+1+x=0$，联立$\begin{cases}P^2+xp+p-y=0\\ 2p+1+x=0\end{cases}$，消去 P 得：$y=-\dfrac{(x+1)^2}{4}$是方程奇解。

例 3 题：求出方程 $y=y'^2-xy+\dfrac{x^2}{2}$ 的解？

解：令 $y'=p$，原方程成为$y=p^2-xp+\dfrac{x^2}{2}$，两边对 x 求导得 $p=2p\dfrac{dp}{dx}-p-x\dfrac{dp}{dx}+x$，移项和因式分解得

$(2p-x)(\dfrac{dp}{dx}-1)=0$，$2p-x=0$或$\dfrac{dp}{dx}=1$,即$p=\dfrac{x}{2}$或$p=x+c$,分别与方程联立$\begin{cases}p=x+c\\ y=p^2-xp+\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$和$\begin{cases}p=\dfrac{x}{2}\\ y=p^2-xp+\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$，消去 p 得通解 $y=\dfrac{x^2}{2}+cx+c^2$，以及特解 $y=\dfrac{x^2}{4}$；