高数辅导网 www.unhuo.com，微信：gaoshufudao 13392844111 QQ：78609419

题： $tX' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$ ， $t>0$

(a) Find the general solution to the corresponding homogeneous system

求对应齐次方程组的通解

(b) Find the general solution to the nonhomogeneous system

求非齐次方程组通解。

解： $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)-4 = \lambda^2+\lambda-6 = (\lambda+3)(\lambda-2)=0$

$\lambda_1=-3$ ， $\lambda_2=2$ 。

$\lambda=-3$ $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

设 $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} u(t)$ ， $X' = \begin{pmatrix} u'(t) \\ -4u'(t) \end{pmatrix}$ 代入 $tX' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X$

得 $tu'(t) = -3u(t)$ $\frac{1}{u(t)} d(u(t)) = \frac{-3}{t} dt$ ， $u(t) = t^{-3}$

$\lambda=2$ $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

设 $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v(t)$ $X' = \begin{pmatrix} v'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$ 代入 $tX' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X$

得 $tv'(t) = 2v(t)$ $\frac{1}{v(t)} d(v(t)) = \frac{2}{t} dt$ ， $v(t) = t^2$

∴ $y^{(c)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} t^{-3} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^2$ 是 $tX' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X$ 通解.

(b) 齐次方程组基解阵 $\phi(t) = \begin{pmatrix} t^{-3} & t^2 \\ -4t^{-3} & t^2 \end{pmatrix}$

$\phi^{-1}(t) = \frac{1}{5t^{-1}} \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \\ 4t^{-3} & t^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}t^3 & -\frac{1}{5}t^3 \\ \frac{4}{5}t^{-2} & \frac{1}{5}t^{-2} \end{pmatrix}$ ， $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$

非齐次方程组的特解 $x_p(t) = \phi(t) \int \phi^{-1}(t) f(t)\, dt$

$= \begin{pmatrix} t^{-3} & t^2 \\ 4t^{-3} & t^2 \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \frac{1}{5}t^3 & -\frac{1}{5}t^3 \\ \frac{4}{5}t^{-2} & \frac{1}{5}t^{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} t^{-3} & t^2 \\ -4t^{-3} & t^2 \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 0 \\ t^{-1} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} t^2 \ln t \\ t^2 \ln t \end{pmatrix}$

∴ 非齐次通解为 $X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} t^{-3} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} t^2 \ln t \\ t^2 \ln t \end{pmatrix}$