题：函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且 $f'(x) \neq 0$

试证存在 $\xi, \eta \in (a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \dfrac{e^b - e^a}{b-a} e^{-\eta}$。

证明：令 $g(x) = e^x$，则 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a; b]$ 上连续，在 (a, b) 可导，即满足柯西中值定理，即至少一点 $\eta \in (a, b)$

使得 $\dfrac{f'(\eta)}{g'(\eta)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$，　$\dfrac{f'(\eta)}{e^\eta} = \dfrac{f(b)-f(a)}{e^b - e^a}$

即 $f(b) - f(a) = f' \dfrac{(e^b - e^a)}{e^\eta}$ ……①

又有 $f(x)$ 在 $,b]$ 上满足拉格朗日中值定理

即　存在一点 $\xi \in (a, b)$

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \cdots\cdots ②$$

① 代入 ② 得 $f'(\xi) = \dfrac{f(\eta)(e^b - e^a)}{(b-a)e^\eta}$

即有 $\dfrac{f(\xi)}{f'(\eta)} = \dfrac{e^b - e^a}{b-a} e^\eta$　证毕。