证明：$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$

证：用数学归纳法证明

$k=0$　$\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}=1$ 成立

$k=1$　$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}=1+n+1=\binom{n+2}{1}=n+2$ 成立

设 $k=r$ 时成立，即 $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+r}{r}=\binom{n+r+1}{r}$

证 $k=r+1$ 时成立，先证 $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!}+\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$

$$=\frac{(n-1)!(n-k)+(n-1)!k}{(n-k)!\,k!}=\frac{(n-1)!(n-k+k)}{(n-k)!\,k!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}$$

$\therefore \binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+r}{r}+\binom{n+r+1}{r+1}=\binom{n+r+1}{r}+\binom{n+r+1}{r+1}=\binom{n+r+1+1}{r+1}$ 成立

根据归纳法原理知

$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$ 成立　　证毕

证法二，组合分析法

令 $S=\{a_1,a_2,\cdots a_n,a_{n+1},a_{n+2}\cdots a_{n+k},a_{n+k+1}\}$

集合S的k个元素的子集个数为 $\binom{n+k+1}{k}$，恰是要证等式右边

S的不含 a_{n+k+1} 的k个元素的子集个为 $\binom{n+k}{k}$

S的含 a_{n+k+1} 不含 a_{n+k} 的k个元素子集个数为 $\binom{n+k-1}{k-1}$

S的含 a_{n+k+1}，a_{n+k} 不含 a_{n+k-1} 的k个元素的子集个数 $\binom{n+k-2}{k-2}$

……

S的含 a_{n+k+1}，$a_{n+k}\cdots\cdots a_{n+2}$ 不含 a_{n+1} 的k个元素子集数为 $\binom{n}{0}$

由加法法则知S的k个元素的子集数为

$\binom{n+k}{k}+\binom{n+k-1}{k-1}+\binom{n+k-2}{k-2}+\cdots\binom{n}{1}+\binom{n}{0}$ 恰是要证等式左边

$\therefore \binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$　证毕