证明: $\binom{n}{0}\binom{n}{1}+\binom{n}{1}\binom{n}{2}+\cdots\cdots+\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}=\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$

证: $(1+x)^m=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}x^r$, $(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r$

$(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n=\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}x^k\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

$(1+x)^{m+n}=1+\binom{m+n}{1}x+\cdots+\binom{m+n}{r}x^r+\cdots+\binom{m+n}{m+n}x^{m+n}$

$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}x^k\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=1+\left[\binom{m}{0}\binom{n}{1}+\binom{m}{1}\binom{n}{0}\right]x+\cdots$

$+\left[\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots\binom{m}{r}\binom{n}{0}\right]x^r+\cdots$

由两式x^r的系数相得:

$\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots\binom{m}{r}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{r}$

又 ∵ $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ ∴ $\binom{n}{0}\binom{n}{1}+\binom{n}{1}\binom{n}{2}+\cdots\cdots+\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}$

$=\binom{n}{0}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-2}+\cdots\cdots+\binom{n}{n-1}\binom{n}{0}=\binom{n+n}{n-1}=\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$

证法二 组合证明法

设 $S=\{a_1,a_2,\cdots a_n,b_1,b_2\cdots b_m\}$

等式右边就相当于从S中选r个选法 $\binom{m+n}{r}$

令 $S_1=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$, $S_2=\{b_1,b_2\cdots b_m\}$

S_1不选 S_2选r个选法 $\binom{n}{0}\binom{m}{r}$

S_1选1个, S_2选r-1个选法 $\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}$

、、、、、、

S_1选r个, S_2不选 选法 $\binom{n}{r}\binom{m}{0}$

加法法则得总选法为: $\binom{n}{0}\binom{m}{r}+\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}+\cdots+\binom{n}{r}\binom{m}{0}=\binom{m+n}{r}$

证毕.