设A为n阶实对称矩阵，秩$r(A)=n$. A_{ij}是$A=(a_{ij})_{n\times n}$中元素的代数余子式，二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j$

(1) 记$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 把$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$写成矩阵形式，并证明二次型$f(X)$的矩阵为A^{-1}

(2) 二次型$g(X)=X^TAX$与$f(X)$的规范型是否相同？说明理由。

解：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{A_{i1}x_ix_1+A_{i2}x_ix_2+\cdots+A_{in}x_ix_n}{|A|}\right)$$

$$=\frac{1}{|A|}(A_{11}x_1^2+A_{12}x_1x_2+\cdots+A_{1n}x_1x_n+A_{21}x_2x_1+A_{22}x_2^2+\cdots\cdots+A_{nn}x_n^2)$$

(1) $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $f(X)=X^T\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}X$

$\because r(A)=n$ $\therefore A$可逆，且$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$

$\because A$为实对称则$A^T=A$，$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$ $\therefore A^{-1}$也为实对称

因此 $f(X)=X^TA^{-1}X$，二次型矩阵为A^{-1}

(2) $\because$ $(A^{-1})^TAA^{-1}=(A^T)^{-1}E=A^{-1}$

$\therefore$ A与A^{-1}合同

两合同矩阵有相同的惯性指数

于是$g(X)=X^TAX$与$f(X)$有相同的规范形