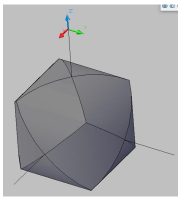
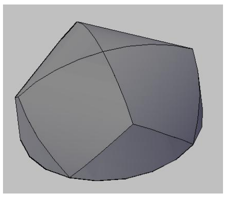
题关键词：用二重积分计算体积，用极坐标代换计算二重积分。

题：计算两两垂直相交的三个半径为 a 的圆柱的(三中心轴线相交于一点）时相交部分体积。

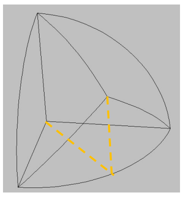
解；为了弄清楚三圆柱相互垂直交截出的形状，用 CAD 软件画图如下：



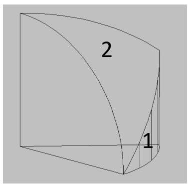
图(A)



图(B)



图(C)



图(D)

如上图(A)，即为两两垂直的三个等半径圆柱相交体。为寻找便于积分计算部分，我们切除对称部分，先切除下半部分，结果如图(B)，再切掉左半部分，再切去前半部分后得如图(C)(黄线是外加)形状，可以看出仍以黄线所在面对称，再切去一半，得如图(D)所示的形状，该图中，面 2 是横向圆柱面的部分，面 1 是竖直圆柱面的部分，其余两面都是竖直平面，底面是 1/8 圆的扇形。由此易知所求体积是图(D)所示部分体积的 16 倍，体积计算的积分式子如下：

（极坐标变换：$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, dxdy = rdrd\theta$ ）

$$16\iint_{D}\sqrt{a^2-x^2}\,dxdy = 16\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{a}\sqrt{a^2-(r\cos\theta)^2}\,rdr \overset{u=a^2-(r\cos\theta)^2,\,du=-2r\cos^2\theta d\theta}{=} 16\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_{a^2}^{a^2\sin^2\theta}(-\frac{1}{2\cos^2\theta}u^{\frac{1}{2}})du$$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-\frac{1}{3\cos^2\theta}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{a^2}^{a^2\sin^2\theta})d\theta = \frac{16}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta})d\theta = \frac{16}{3}a^3\left[\tan\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\sin\theta d\theta\right]$$

$$=\frac{16}{3}a^3\left[1-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sec^2\theta-1\right)\sin\theta d\theta\right] = \frac{16}{3}a^3\left[1-\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sec^2\theta\right)\sin\theta d\theta\right]$$

$$=\frac{16}{3}a^3\left[2-\frac{\sqrt{2}}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 d(\sin\theta)\right] = \frac{16}{3}a^3\left[2-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{\cos\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right] = \frac{16}{3}a^3(3-\frac{3\sqrt{2}}{2}) = \frac{8}{3}(6-3\sqrt{2})a^3$$