题关键词：一阶线性常系数齐次/非齐次微分方程组，矩阵函数在微分方程组中的应用。

题：求解$\begin{cases}\dfrac{dX}{dt}=AX+F(t)\\ X(0)=(1,1,1)^T\end{cases}$， $A=\begin{bmatrix}3&-1&1\\2&0&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$， $F(t)=(0,0,e^{2t})^T$.

解：det(A-λI)=det$\begin{bmatrix}3-\lambda&-1&1\\2&0-\lambda&-1\\1&-1&2-\lambda\end{bmatrix}$=λ(λ-2)(λ-3)=0, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$.相对应的三个线无关的特征向量为：

$X_1=(1，5，2)^T$，$X_2=(1，1，0)^T$，$X_1=(2，1，1)^T$

$p=\begin{bmatrix}1&1&2\\5&1&1\\2&0&1\end{bmatrix}$，$p^{-1}=-\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-3&-3&9\\-2&2&-4\end{bmatrix}$，对应齐次方程组的解为：$X=e^{At}X(0)=p\begin{bmatrix}1&&\\&e^{2t}&\\&&e^{3t}\end{bmatrix}p^{-1}X(0)$

$$=\begin{bmatrix}1&1&2\\5&1&1\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&e^{2t}&\\&&e^{3t}\end{bmatrix}(-\frac{1}{6})\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-3&-3&9\\-2&2&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=(-\frac{1}{6})\begin{bmatrix}-1+3e^{2t}-8e^{3t}\\-5+3e^{2t}-4e^{3t}\\-2-4e^{3t}\end{bmatrix};$$

这个问题的非齐次方程组解为：$X=e^{At}X(0)+\int_0^t e^{A(t-r)}F(r)dr$;下面计算 $I=\int_0^t e^{A(t-r)}F(r)dr$

$$e^{A(t-r)}F(r)=p\begin{bmatrix}1&&\\&e^{2(t-r)}&\\&&e^{3(t-r)}\end{bmatrix}p^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\e^{2r}\end{bmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-e^{2r}+9e^{2t}-8e^{3t-r}\\-5e^{2r}+9e^{2t}+4e^{3t-r}\\-2e^{2r}-4e^{3t-r}\end{bmatrix},\quad I=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+(9t+\frac{15}{2})\ e^{2t}-8e^{3t}\\\frac{5}{2}+(9t+\frac{3}{2})e^{2t}-4e^{3t}\\1+3e^{2t}-4e^{3t}\end{bmatrix}$$

方程组的解为：$$X=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1+3e^{2t}-8e^{3t}\\-5+3e^{2t}-4e^{3t}\\-2-4e^{3t}\end{bmatrix}+(-\frac{1}{6})\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+(9t+\frac{15}{2})e^{2t}-8e^{3t}\\\frac{5}{2}+(9t+\frac{3}{2})e^{2t}-4e^{3t}\\1+3e^{2t}-4e^{3t}\end{bmatrix}=(-\frac{1}{6})\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}+(9t+\frac{21}{2})e^{2t}-16e^{3t}\\-\frac{5}{2}+(9t+\frac{9}{2})e^{2t}-8e^{3t}\\-1+3e^{2t}-8e^{3t}\end{bmatrix}。$$

解题所用定理：

1）一阶线性常系数齐次微分方程组的定解问题$\begin{cases}\dfrac{dX}{dt}=AX\\ X|_{t=t_0}=X(t_0)\end{cases}$的唯一解是 $X(t)=e^{A(t-t_0)}X(t_0)$。

2）非齐次微分方程组$\begin{cases}\dfrac{dX}{dt}=AX+F(t)\\ X|_{t=t_0}=X(t_0)\end{cases}$的为：$X=e^{A(t-t_0)}X(t_0)+\int_0^t e^{A(t-r)}F(r)dr$ 。

注：矩阵函数数微积分，就是对矩阵--中的每个元素微积分，题中就没写出过程。