题关键词：定积分的分部积分，换元积分，反导.

题：设 $y'(x)=\arctan(x-2)^2$，且 $y(0)=0$，计算 $\int_0^2 y(x)dx$

分析：用分部积分 $\int \mathrm{u}dv = uv - \int vdu$

解：u=y(x)，v=x，du=y'(x)dx; $t=(x-2)^2$, dt=2(x-2)dx, (x-2)dx=(1/2)dt

$$\int_0^2 y(x)dx = xy(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 xy'(x)dx = 2y(2) - \int_0^2 x\arctan(x-2)^2 dx = 2y(2) - \int_0^2 (x-2)\arctan(x-2)^2 dx$$

$$-\int_0^2 2\arctan(x-2)^2 dx = 2y(2) - \frac{1}{2}\int_4^0 \arctan(t)dt - 2\int_0^2 y'(x)dx = 2y(2) - \frac{1}{2}t\arctan t\,|_4^0 + \frac{1}{2}\int_4^0 t\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$-2\mathrm{y}(\mathrm{x})\,|_0^2 = 2\arctan 4 + \frac{1}{4}\int_4^0 \frac{1}{1+t^2}d(1+t^2) = 2\arctan 4 + \frac{1}{4}\ln(1+t^2)\,|_4^0 = 2\arctan 4 - \frac{1}{4}\ln 17$$

讲评：本题用了两次分部积分，一次换元，一次凑微分，一次反导。刚开始第一步，是第一次分部积分，第二次

$\int \arctan t dt = t\arctan t - \int t * \frac{1}{1+t^2}dt$，其中 arctant 是公式中的 u，t 是 v，du=[1/(1+t2)]dt .